Interrogation de rentrée

Mise en route

Exercice 1

1. Quel est le thème au programme de PSI en Lettres/Philosophie ?

2. Quels sont les 3 œuvres au programme de PSI en Lettres/Philosophie ? (titres / auteurs)

Exercice 2

1. Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto \exp(x)$. On fera apparaître l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées (l'échelle n'est pas imposée) ainsi que les tangentes en d'éventuels points d'intérêt.

2. Quel est le lien entre les fonctions f et g ? Comment cela se traduit-il graphiquement ?

Exercices d'été

Exercice 3. *Rayer la ou les mentions inutiles*

1. Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est : libre / liée

2. Dans l'écriture $\big(\{X = i\}\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$, la variable i est : libre / liée

et la variable n est : libre / liée

3. Le résultat de la quantité $\sum_{i=1}^{k} i$ dépend de : i / k / ni i ni k

4. Une variable muette est : libre / liée

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),

la quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: dépend de n / ne dépend pas de n / peut dépendre de n

6. Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, la variable t est : libre / liée

la variable x est : libre / liée

7. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y = 0\}$,

la variable x est : libre / liée

la variable y est : libre / liée

la variable z est : libre / liée

8. Dans l'écriture : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$,

la variable x est : libre / liée

la variable y est : libre / liée

Exercice 4
Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$y' + y = t^k \, \mathrm{e}^{-t} \text{ où } k \in \mathbb{N} \tag{(E)}$$

(on pourra utiliser la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière)

Exercice 5
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{2} \frac{\ln(x)}{x} \, dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^3 \, \mathrm{e}^{x^2} \, dx$
(on pourra procéder par intégration par parties)

Exercice 6
Déterminer (en la justifiant) la nature des séries suivantes.

1. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ ***2.*** $\sum \mathrm{e}^{-n}$ ***3.*** $\sum \dfrac{(\sqrt{2})^n}{n!}$

Exercice 7
Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 6\,x & - & 3\,y & + & 9\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 8
On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda \, I_3$ est non inversible.

Exercice 9

1. On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\dfrac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\dfrac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile.
Déterminer $\mathbb{P}(\{X = 1\})$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires *de même loi* à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$.
On suppose en outre X et Y indépendantes.
Démontrer : $\mathbb{P}(\{X = Y\}) \; = \; \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2$.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs entières.
Démontrer : $\mathbb{P}(\{X \leqslant Y\}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\}) \, \mathbb{P}(\{Y \geqslant n\})$.