Interrogation de rentrée / 49

Exercice 1

1. Le thème au programme cette année est : « Individu et communauté ».

2. Les 3 œuvres au programme de PSI sont :
- × **Les Suppliantes** et **Les Sept contre Thèbes**, Eschyle.
- × **Traité théologico-politique** (préface et chapitres XVI à XX), Spinoza.
- × **Le Temps de l'innocence**, Edith Wharton.

- **4 pts : 1 point par œuvre (avec orthographe correcte) + 1 point pour le thème**

Exercice 2

1. Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto \exp(x)$. On fera apparaître l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées (l'échelle n'est pas imposée) ainsi que les tangentes en d'éventuels points d'intérêt.

- **4 pts :**
  - × **1 point : allure de la courbe**
  - × **1 point : tangente correcte (bonne équation)**
  - × **1 point : compréhension de la notion de tangente**
  - × **1 point : propreté**
- **0 point : si 2 graphes séparés, en cas de propreté trop faible.**
- **-2 points : tracé tremblotant.**

2. Quel est le lien entre les fonctions f et g ? Comment cela se traduit-il graphiquement ?
- **1 pt : f et g sont des bijections réciproques**
- **1 pt : les courbes représentatives de f et g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$**

Exercice 3. *Rayer la ou les mentions inutiles*

- **0,5 pt par item. Le tout sur 6,5 (on met 7 en cas de sans faute).**

1. Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est : ~~libre~~ / liée

La variable x est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de x est associée une image par la fonction).

2. Dans l'écriture $\big(\{X = i\}\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$, la variable i est : ~~libre~~ / liée

et la variable n est : libre / ~~liée~~

La variable i est muette (on considère ici, pour tout les entiers i de $[\![1, n]\!]$, les événements $\{X = i\}$).
La variable n est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

3. Le résultat de la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} i$ dépend de : $\cancel{i}$ / k / ~~ni i ni k~~

La variable i est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole de sommation $\sum$).

La variable k est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).
Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable k.

4. Une variable muette est : ~~libre~~ / liée

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),
la quantité $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$: ~~dépend de n~~ / ne dépend par de n / ~~peut dépendre de n~~

Rappelons quelques définitions :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ (où } \ell\in\mathbb{R}) &\quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad (n\geqslant n_0 \ \Rightarrow\ |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon)\\
\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty &\quad\Leftrightarrow\quad \forall A\in\mathbb{R},\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad (n\geqslant n_0 \ \Rightarrow\ u_n\geqslant A)\\
\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty &\quad\Leftrightarrow\quad \forall A\in\mathbb{R},\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad (n\geqslant n_0 \ \Rightarrow\ u_n\leqslant A)
\end{aligned}$$

La variable n est donc muette car, dans tous les cas, elle est sous la portée d'un quantificateur.

6. Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, la variable t est : ~~libre~~ / liée
la variable x est : libre / ~~liée~~
La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\displaystyle\int$).
La variable x est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématiques).

7. Dans l'écriture $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0 \ \text{ et } \ y=0\}$,
la variable x est : ~~libre~~ / liée
la variable y est : ~~libre~~ / liée
la variable z est : ~~libre~~ / liée
Les variables x, y et z sont muettes (on s'intéresse ici à tous les réels x, y et z vérifiant une condition donnée).

8. Dans l'écriture : $\forall x\in\mathbb{R}_+, \exists y\in\mathbb{R},\ x=y^2$,
la variable x est : ~~libre~~ / liée
la variable y est : ~~libre~~ / liée
Les variables x et y sont muettes car elles sont sous la portée d'un quantificateur.

Exercice 4
Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue $y\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$y' + y = t^k\,\mathrm{e}^{-t} \text{ où } k\in\mathbb{N} \tag{E}$$

(on pourra utiliser la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière)

- **1 pt : solution de (H) est $\{t\mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$**
- **2 pts : solution particulière**
  - **1 pt : on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $t\mapsto\lambda(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ et g est solution de $(E)\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \lambda'(t)=t^k$**
  - **1 pt : la fonction $g : x\mapsto \dfrac{1}{k+1}\ t^{k+1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est une solution particulière de (E).**
- **1 pt : l'ensemble des solutions de (E) est : $\left\{t\mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1}{k+1}\ t^{k+1}\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda\in\mathbb{R}\right\}$**

Exercice 5
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{2} \frac{\ln(x)}{x}\, dx$

- **1 pt : la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est continue sur le** `SEGMENT` **$[2, \mathrm{e}]$. Ainsi, l'intégrale est bien définie.**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{\mathbf{e}}^{2} \frac{\ln(x)}{x}\, dx = \int_{\mathbf{e}}^{2} \frac{1}{x} \, \big(\ln(x)\big)^1 \, dx$
- **1 pt :** $= \left[\dfrac{\big(\ln(x)\big)^{1+1}}{1+1} \right]_{\mathbf{e}}^{2} = \dfrac{1}{2} \, \Big(\big(\ln(2)\big)^2 - 1\Big)$

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^3 \, \mathrm{e}^{x^2}\, dx$

- **1 pt : La fonction $f : x \mapsto x^3 \mathrm{e}^{x^2}$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ est donc bien définie.**
- **1 pt :** $I = \dfrac{1}{2} \, \Big[x^2 \, \mathbf{e}^{x^2} \Big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 x \, \mathbf{e}^{x^2} \, dx$ **même sans justification**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 x \, \mathbf{e}^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x \, \mathbf{e}^{x^2} \, dx$ **et calcul final** $= \dfrac{1}{2}$

Exercice 6
Déterminer (en la justifiant) la nature des séries suivantes.

1. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$

- **1 pt :** $\left|\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$
- **1 pt :** $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ **est convergente en tant que série de Riemann d'exposant** $\dfrac{3}{2}$ (> 1)

2. $\sum \mathrm{e}^{-n}$

- **1 pt : la série $\sum \mathrm{e}^{-n}$ est convergente en tant que série géométrique**
- **1pt : de raison $\dfrac{1}{\mathbf{e}}$ car $\left|\dfrac{1}{\mathbf{e}}\right| < 1$.**

3. $\sum \dfrac{(\sqrt{2})^n}{n!}$

- **1 pt : la série $\sum \dfrac{(\sqrt{2})^n}{n!}$ est convergente en tant que série exponentielle (de paramètre** $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$)

Exercice 7

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 6x - 3y + 9z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$

- **2 pts : pour le premier système**
- **2 pts : pour le deuxième système**

Démonstration.

1.

$$
\begin{aligned}
(S_3) &\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -4z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x - z = -y \\ -4z = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_1 \leftarrow 4L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} -4x = -4y \\ -4z = 0 \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{4} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{4} L_2}}{\iff} \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
(S_2) &\iff \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 6x - 3y + 9z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\iff \left\{ 2x = y - 3z \right.
\end{aligned}
$$

□

Exercice 8

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_3$ est non inversible.

- **2 pts :** $\det(A - \lambda\ I_3) = (1-\lambda)\ (1-\lambda)\ (-3-\lambda)$
- **1 pt :** $A - \lambda I_3$ **non inversible** $\Leftrightarrow$ $\lambda = 1$ `OU` $\lambda = 1$ `OU` $\lambda = -3$

Exercice 9

1. On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile.
Déterminer $\mathbb{P}(\{X = 1\})$.

- **0 pt :** $\{X = 1\} = P_1$
- **1 pt : La famille** (A_0, A_1, A_2) **forme un système complet d'événements. Par la FPT ...**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(P_1) = \mathbb{P}(A_0 \cap P_1) + \cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap P_1)} + \mathbb{P}(A_2 \cap P_1)$
- **1 pt :** $= \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}(P_1) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(P_1)$
- **0 pt :** $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 \;=\; \frac{1}{2}$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires *de même loi* à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$.
On suppose en outre X et Y indépendantes.
Démontrer : $\mathbb{P}(\{X = Y\}) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2$.

- **1 pt : La famille** $(\ \{X = k\}\ )_{k \in [\![0,n]\!]}$ **forme un système complet d'événements. Par la FPT ...**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(\{X - Y = 0\}) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{X - Y = 0\})$
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\}) \times \mathbb{P}(\{Y = k\})$ **car** X **et** Y **indépendantes**
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2$ **car** X **et** Y **ont même loi**

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs entières.
Démontrer : $\mathbb{P}(\{X \leqslant Y\}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\})\, \mathbb{P}(\{Y \geqslant n\})$.

- **1 pt : La famille** $(\{X = n\})_{n \in \mathbb{N}}$ **est un système complet d'événements. Par la FPT ...**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(\{X \leqslant Y\}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{X \leqslant Y\})$
- **1 pt :** $= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)\ \mathbb{P}\big(\{n \leqslant Y\}\big)$ **car** X **et** Y **indépendantes**