Interrogation de rentrée

Mise en route

Exercice 1

1. Quel est le thème au programme de PSI en Lettres/Philosophie ?

2. Quels sont les 3 œuvres au programme de PSI en Lettres/Philosophie ? (titres / auteurs)

Démonstration.

1. Le thème au programme cette année est : « Individu et communauté ».

2. Les 3 œuvres au programme de PSI sont :

- **Les Suppliantes** et **Les Sept contre Thèbes**, Eschyle.
- **Traité théologico-politique** (préface et chapitres XVI à XX), Spinoza.
- **Le Temps de l'innocence**, Edith Wharton. □

Exercice 2

1. Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto \exp(x)$. On fera apparaître l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées (l'échelle n'est pas imposée) ainsi que les tangentes en d'éventuels points d'intérêt.

2. Quel est le lien entre les fonctions f et g ? Comment cela se traduit-il graphiquement ?

Exercices d'été

Exercice 3. *Rayer la ou les mentions inutiles*

1. Dans l'écriture $f : x \mapsto 1 + x$, la variable x est : ~~libre~~ / liée

La variable x est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de x est associée une image par la fonction).

2. Dans l'écriture $\big(\{X = i\}\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$, la variable i est : ~~libre~~ / liée

et la variable n est : libre / ~~liée~~

La variable i est muette (on considère ici, pour tout les entiers i de $[\![1, n]\!]$, les événements $\{X = i\}$).
La variable n est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

3. Le résultat de la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} i$ dépend de : $\cancel{i}$ / k / ~~ni i ni k~~

La variable i est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole de sommation $\sum$).

La variable k est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).
Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable k.

4. Une variable muette est : ~~libre~~ / liée

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite admettant une limite (finie ou non),
la quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: ~~dépend de n~~ / ne dépend par de n / ~~peut dépendre de n~~

Rappelons quelques définitions :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ (où } \ell\in\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad (n\geqslant n_0 \ \Rightarrow\ |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon)$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A\in\mathbb{R},\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad (n\geqslant n_0 \ \Rightarrow\ u_n\geqslant A)$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A\in\mathbb{R},\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad (n\geqslant n_0 \ \Rightarrow\ u_n\leqslant A)$$

La variable n est donc muette car, dans tous les cas, elle est sous la portée d'un quantificateur.

6. Dans l'écriture $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$, la variable t est : ~~libre~~ / liée
la variable x est : libre / ~~liée~~
La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\displaystyle\int$).
La variable x est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématiques).

7. Dans l'écriture $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0 \ \text{ et } \ y=0\}$,
la variable x est : ~~libre~~ / liée
la variable y est : ~~libre~~ / liée
la variable z est : ~~libre~~ / liée
Les variables x, y et z sont muettes (on s'intéresse ici à tous les réels x, y et z vérifiant une condition donnée).

8. Dans l'écriture : $\forall x\in\mathbb{R}_+, \exists y\in\mathbb{R},\ x=y^2$,
la variable x est : ~~libre~~ / liée
la variable y est : ~~libre~~ / liée
Les variables x et y sont muettes car elles sont sous la portée d'un quantificateur.

Exercice 4
Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue $y\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$y'+y = t^k\,\mathrm{e}^{-t} \text{ où } k\in\mathbb{N} \tag{E}$$

(on pourra utiliser la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière)

Démonstration.
Résolvons (E).

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H) $y'+y=0$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :
$$\{t\mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E_1).
Comme le second membre de (E) ne semble pas avoir une forme simple (et que (E) est une EDL d'ordre 1), on applique la méthode de variation de la constante. Autrement dit, on cherche une

solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\,\mathrm{e}^{-t}$.
Soit $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note alors $g : x \mapsto \lambda(t)\,\mathrm{e}^{-t}$. La fonction g est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) + g(t) = t^k\,\mathrm{e}^{-t} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \big(\lambda'(t)\,\mathrm{e}^{-t} + \cancel{\lambda(t) \times (-\mathrm{e}^{-t})}\big) + \cancel{\lambda(t)\,\mathrm{e}^{-t}} = t^k\,\mathrm{e}^{-t} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t) = t^k \end{aligned}$$

La fonction λ cherchée peut donc être choisie parmi les primitives de $t \mapsto t^k$.
La fonction $\lambda : t \mapsto \dfrac{1}{k+1}\ t^{k+1}$ convient.
Ainsi, la fonction $g_5 : x \mapsto \dfrac{1}{k+1}\ t^{k+1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est une solution particulière de (E).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est :} \\ \{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1}{k+1}\ t^{k+1}\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.\end{array}}$$

□

Exercice 5
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{2} \frac{\ln(x)}{x}\ dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^3\ \mathrm{e}^{x^2}\ dx$
(on pourra procéder par intégration par parties)

Démonstration.
a) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est continue sur le `SEGMENT` $[2, \mathrm{e}]$.
(attention, il s'agit bien du segment $[2, e]$ *et pas* $[e, 2]$ *puisque :* $e \simeq 2,71 > 2$ *!)*
Ainsi, l'intégrale est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{e}}^{2} \frac{\ln(x)}{x}\ dx \quad &= \quad \int_{\mathrm{e}}^{2} \frac{1}{x}\ \big(\ln(x)\big)^1\ dx \\ &= \quad \left[\ \frac{\big(\ln(x)\big)^{1+1}}{1+1}\ \right]_{\mathrm{e}}^{2} \\ &= \quad \frac{1}{2}\ \left[\ \big(\ln(x)\big)^2\ \right]_{\mathrm{e}}^{2} \\ &= \quad \frac{1}{2}\ \Big(\big(\ln(2)\big)^2 - \big(\ln(\mathrm{e})\big)^2\Big) \\ &= \quad \frac{1}{2}\ \Big(\big(\ln(2)\big)^2 - 1\Big) \end{aligned}$$

b)
- La fonction $f : x \mapsto x^3\mathrm{e}^{x^2}$ est continue sur le segment $[0, 1]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$ est donc bien définie.
- On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclrcl} u(x) & = & x^2 & u'(x) & = & 2x \\ v'(x) & = & x\mathrm{e}^{x^2} & v(x) & = & \dfrac{1}{2}\ \mathrm{e}^{x^2} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\left[\, x^2\, e^{x^2} \,\right]_0^1 - \int_0^1 x\, e^{x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left(e^1 - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 2x\, e^{x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\, e - \frac{1}{2}\left[\, e^{x^2} \,\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\, e - \frac{1}{2}\left(e^1 - e^0\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 x^3\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}}$$

Commentaire

- Dans la rédaction, on fait apparaître une règle classique de « primitivation ».
  On rappelle dans les tableaux ci-dessous les règles à connaître.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto a$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto a\,x + \lambda$
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$I \subset \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \ln(x) + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}_-^*$	$x \mapsto \ln(-x) + \lambda$
$x \mapsto e^x$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto e^x + \lambda$
$x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$ et $a \neq 1$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{a^x}{\ln(a)} + \lambda$

Commentaire

$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	× u dérivable sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	× u dérivable sur I. $u > 0$ sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	× u dérivable sur I. $u \neq 0$ sur I.	$x \mapsto \ln(\lvert u(x) \rvert) + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ \mathrm{e}^{u(x)}$	u dérivable sur I.	$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} + \lambda$

(où λ est un réel quelconque)
Lorsque la fonction f est positive sur le segment d'intrégration $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\ dt \geqslant 0$.
Ainsi, le signe du résultat est une bonne mesure de vérification. □

Exercice 6
Déterminer (en la justifiant) la nature des séries suivantes.

1. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ ***2.*** $\sum \mathrm{e}^{-n}$ ***3.*** $\sum \dfrac{(\sqrt{2})^n}{n!}$

MÉTHODO **Étude des séries numériques (PCSI)**

Afin de déterminer la nature d'une série $\sum\ u_n$, on pourra penser à utiliser l'une des techniques listées ci-dessous.

1) Étude de la suite (u_n) réelle ou complexe
- ***a)*** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, la série $\sum\ u_n$ diverge grossièrement donc diverge.
- ***b)*** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la série $\sum\ u_n$ ne diverge pas grossièrement.
La série $\sum\ u_n$ peut être divergente ou convergente.
(une étude plus précise doit être réalisée)

C'est une première étude de la « taille » du terme général u_n de la série $\sum\ u_n$ étudiée.

2) Si $\sum\ u_n$ est à termes positifs (c'est-à-dire si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant 0$)

On dispose des quatre outils suivants.
- ***a)*** Critère de comparaison par inégalité des séries à termes positifs.
- ***b)*** Critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs.
- ***c)*** Critère de comparaison par négligeabilité des séries à termes positifs.
- ***d)*** Critère de comparaison par domination des séries à termes positifs.

On estime ici plus précisément la « taille » du terme général u_n de la série $\sum\ u_n$ étudiée. Pour ce faire, on compare u_n au terme général v_n d'une série de référence. On pensera notamment :
× à comparer avec des séries de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ dont la nature est donnée par le critère de Riemann.
(on pourra aussi penser à comparer au terme général d'une série géométrique ou au terme général de la série exponentielle ou plus généralement au terme général d'une série dont on a établi la nature précédemment)

× à utiliser la formule de Stirling (cf cours de 2ème anéne) pour évaluer la taille d'un terme général faisant apparaître des factorielles.

Note : si $\sum u_n$ est à termes négatifs, on étudie $\sum -u_n$ qui est de même nature que $\sum u_n$.

3) Si $\sum u_n$ est à termes réels de signes non constants ou est à termes complexes

On pourra penser à l'une de ces méthodes.

a) Utilisation du critère spécial des séries alternées si le cadre s'y prête (cf cours de 2ème année).

b) Démontrer de la convergence absolue (comme $|u_n| \geqslant 0$, les techniques du *3)* sont utilisables)

- Si $\sum |u_n|$ est convergente (c'est-à-dire $\sum u_n$ absolument convergente) alors $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\sum |u_n|$ est divergente alors $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente *(une étude plus précise doit être réalisée).*

Démonstration.

1. (i) $\left|\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right| = \dfrac{\ln(n)}{n^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

(ii) La série $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{2}$ (> 1).

Ainsi, par théorème de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ est (absolument) convergente.

2. La série $\sum \mathrm{e}^{-n}$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ car $\left|\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right| < 1$.

3. La série $\sum \dfrac{(\sqrt{2})^n}{n!}$ est convergente en tant que série exponentielle de paramètre $\sqrt{2}$. □

Exercice 7

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 6x & - & 3y & + & 9z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$

Démonstration.

1.

$$(S_3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & - & 4z & = & 0 \\ & & & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & - & 4z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & - & z & = & -y \\ & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 4L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} -4x & & & = & -4y \\ & - & 4z & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{4} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{4} L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

2.

$$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 6x & - & 3y & + & 9z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{ 2x = y - 3z \right.$$

$\square$

Exercice 8

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_3$ est non inversible.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que pour toute matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} & \text{La matrice } M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est non inversible} \\ \Leftrightarrow \quad & \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, MX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

  Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la propriété suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \text{La matrice } A - \lambda \cdot I_n \text{ est non inversible} \\ \Leftrightarrow \quad & \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, \big(A - \lambda \cdot I_n\big)\ X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow \quad & \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, A\ X = \lambda\ X \end{aligned}$$

- Dans l'exercice ***10*** de la séance 3, on détermine l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que :
  × $AX = 1 \cdot X$ (question ***1.a)***),
  × $AX = -2 \cdot X$ (question ***1.b)***),
  × $AX = 3 \cdot X$ (question ***1.c)***).

  Il est légitime de se poser la question de savoir pourquoi on s'intéresse particulièrement aux réels 1, -2 et 3. Pour ces valeurs, on constate qu'il existe des vecteurs $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nuls tels que $A\,X = \lambda\ X$. Ces valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ sont donc exactement celles telles que la matrice $A - \lambda\,I_3$ est non inversible. On verra l'an prochain que ces valeurs jouent un rôle important. Leur détermination jouent un rôle dans le chapitre « Réduction de matrices » dans lequel on s'intéresse à l'existence d'une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et d'une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :

$$A = P\ D\ P^{-1}$$

  Ce chapitre « Réduction » sera détaillé l'an prochain. Pour ces devoirs de vacances, on vérifie simplement la capacité à résoudre un système linéaire ainsi que la capacité à calculer un déterminant (en l'occurrence le déterminant d'une matrice à paramètre).

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda\, I_3) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + (2-\lambda)\, L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2\, L_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2-2\,\lambda & 1-\lambda\,(2-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\,\lambda \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{3+1} \times (-1) \begin{vmatrix} 2-2\,\lambda & 1-2\,\lambda+\lambda^2 \\ 1-\lambda & 2-2\,\lambda \end{vmatrix} \qquad \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\textit{ère}} \textit{ colonne)} \\
&\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2\, L_2}{=} (-1) \begin{vmatrix} 0 & -3+2\,\lambda+\lambda^2 \\ 1-\lambda & 2-2\,\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)\,\Big(\cancel{0 \times (2-2\,\lambda)} - (1-\lambda) \times (-3+2\,\lambda+\lambda^2)\Big) \\
&= (1-\lambda)\,(1-\lambda)\,(-3-\lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A - \lambda I_3 \text{ non inversible} &\Leftrightarrow \det\big(A - \lambda I_3\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1-\lambda)\,(1-\lambda)\,(-3-\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow 1-\lambda = 0 \ \texttt{OU}\ 1-\lambda = 0 \ \texttt{OU}\ 3-\lambda = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = 1 \ \texttt{OU}\ \lambda = 1 \ \texttt{OU}\ \lambda = -3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } A - \lambda I_3 \text{ non inversible} \ \Leftrightarrow\ \lambda = 1 \ \texttt{OU}\ \lambda = 1 \ \texttt{OU}\ \lambda = -3.}$$

□

Exercice 9

1. On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\dfrac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\dfrac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile.
Déterminer $\mathbb{P}(\{X = 1\})$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $\{X = 1\} = P_1$.
  (l'événement $\{X = 1\}$ est réalisé si et seulement si on obtient Pile lors du 1^{er} tirage)
- La famille (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements.

Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X=1\}\big) &= \mathbb{P}(P_1) \\
&= \mathbb{P}(A_0 \cap P_1) + \cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap P_1)} + \mathbb{P}(A_2 \cap P_1) && \textit{(car } A_1 \cap P_1 = \varnothing \textit{ puisque la pièce 1 ne donne que Face)} \\
&= \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}(P_1) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(P_1) && \textit{(car pour tout } i \in [\![0,2]\!], \ \mathbb{P}(A_i) = \tfrac{1}{3} \neq 0) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 && \textit{(par définition des pièces 0 et 2)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X=1\}\big) = \frac{1}{2}}$$

Commentaire

- Il faut faire particulièrement attention aux objets utilisés dans cette question :
  - × X est une variable aléatoire,
  - × A_i (pour $i \in [\![0,2]\!]$) est un événement.

  Comme X est une variable aléatoire, $\{X=1\}$ est un événement et les objets $\{X=1\}$ et A_i se situent eux au même niveau.
- Cette question est une illustration du cadre classique de la formule des probabilités totales : l'expérience aléatoire débute par un choix (en l'occurrence le choix de la pièce qui sera utilisée) et ce choix influence le reste de l'expérience aléatoire (l'obtention de Pile lors de premier tirage dépend fortement de la pièce avec laquelle on joue).
- La première étape de l'expérience consiste à choisir l'une des 3 pièces :
  - × si la pièce 0 est choisie alors A_0 est réalisé.
  - × si la pièce 1 est choisie alors A_1 est réalisé.
  - × si la pièce 2 est choisie alors A_2 est réalisé.

  Chacun de ces choix excluant les autres, les événements A_0, A_1 et A_2 sont 2 à 2 incompatibles.

  Comme il n'existe pas d'autre choix possible (la liste précédente est exhaustive), alors :

  $$\bigcup_{i=0}^{2} A_i = \Omega$$

  Ces deux points démontrent que la famille (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements.
- On demande alors de déterminer la probabilité de l'événement P_1 (réalisé si et seulement Pile est obtenu lors du premier lancer). Le réflexe initial est de se dire que l'on sait parfaitement déterminer cette valeur pour peu que l'on connaisse la pièce avec laquelle les tirages sont effectués. Autrement dit, on demande $\mathbb{P}(P_1)$ et on a plutôt accès à $\mathbb{P}_{A_0}(P_1)$, $\mathbb{P}_{A_1}(P_1)$, $\mathbb{P}_{A_2}(P_1)$. Il s'agit donc de tester la réalisation de l'événement P_1 par rapport à la réalisation de chacun des événements A_0, A_1 et A_2. Cela se fait formellement avec la formule des probabilités totales. Comme la famille (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements :

  $$\mathbb{P}(P_1) = \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}(P_1) + \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(P_1) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(P_1)$$

Commentaire

- Dans la question, on fournit d'abord la formule sous la forme :

$$\mathbb{P}(P_1) \;=\; \mathbb{P}(A_0 \cap P_1) + \mathbb{P}(A_1 \cap P_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap P_1)$$

  Retenir la formule sous cette forme a deux avantages :
  - il existe des exercices où on détermine initialement les probabilités d'intersection d'événements $\big(\mathbb{P}\big(A_i \cap P_1\big)\big)$ plutôt que les probabilités conditionnelles $(\mathbb{P}_{A_i}(P_1))$. On en reparlera au moment du chapitre sur les couples de variables aléatoires (mais on peut déjà se référer à la question suivante).
  - la formule utilisant les probabilités conditionnelles se déduit naturellement de cette formule.

$\square$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires *de même loi* à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$.
On suppose en outre X et Y indépendantes.
Démontrer : $\mathbb{P}(\{X = Y\}) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathbb{P}(\{X = Y\}) \;=\; \mathbb{P}(\{X - Y = 0\})$$

Commentaire

Remarquons qu'on se ramène ici à un cas particulier de loi d'une somme $X - Y$. Il faut donc se préparer à utiliser les méthodes usuelles pour la détermination de ce type de loi : la formule des probabilités totales.

- La famille $(\ \{X = k\}\ )_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X - Y = 0\}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{X - Y = 0\}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\}) \times \mathbb{P}(\{Y = k\}) && \textit{(car X et Y sont indépendantes)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Big(\mathbb{P}(\{X = k\})\Big)^2 && \textit{(car X et Y ont même loi)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(\{X = Y\}) = \sum_{k=0}^{n} \Big(\mathbb{P}(\{X = k\})\Big)^2.}$$

$\square$

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs entières.
Démontrer : $\mathbb{P}(\{X \leqslant Y\}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\})\, \mathbb{P}(\{Y \geqslant n\})$.

Démonstration.
La famille $(\{X = n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X \leqslant Y\}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{X \leqslant Y\}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = n\} \cap \{n \leqslant Y\}\big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)\, \mathbb{P}(\{n \leqslant Y\}\big) \qquad \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \end{aligned}$$

Les v.a.r. X et Y sont indépendantes, car les lancers du joueur A et ceux du joueur B sont indépendants.

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}\big(\{X \leqslant Y\}\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)\, \mathbb{P}\big(\{Y \geqslant n\}\big).}$$

□