

**Objectif**

L'objectif de ce sujet est l'étude de la gestion des erreurs dans un processus industriel.

On considère un processus industriel automatisé au cours duquel une tâche répétitive est effectuée à chaque instant  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs susceptibles de se produire à l'instant  $n$ . On admet que le système parvient à corriger ces erreurs et à maintenir son fonctionnement si le nombre total d'erreurs enregistrées jusqu'à l'instant  $n$ , noté  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , reste inférieur à une quantité de la forme  $amn$ , où  $a > 1$  est une constante fixée et  $m$  est le nombre moyen d'erreurs enregistrées à chaque instant. On est donc amené à estimer une probabilité de la forme  $P(S_n > nam)$ , dans le but de montrer qu'elle tend vers 0 très rapidement lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Dans la première partie, on étudie le cas particulier où les variables aléatoires  $X_n$  sont mutuellement indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre  $1/2$ . Dans la deuxième partie, on démontre partiellement le théorème de Perron-Frobenius, qui permet, dans la troisième partie, d'étudier le cas où les variables aléatoires  $X_n$  forment une chaîne de Markov, c'est-à-dire où le nombre d'erreurs enregistrées à l'instant  $n+1$  dépend uniquement de celui enregistré à l'instant  $n$ .

**I Cas de la loi de Poisson**

Dans cette partie, on étudie le modèle élémentaire où la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  du nombre d'erreurs aux instants successifs est une suite de variables aléatoires identiquement distribuées, mutuellement indépendantes, et suivant une loi de Poisson de paramètre  $1/2$ .

L'objectif de cette partie est de donner un équivalent de  $P(S_n > n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , afin de s'assurer que celle-ci converge vers 0 avec une vitesse de convergence exponentielle.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $G_{X_n}$  la fonction génératrice de  $X_n$ .

**I.A –** Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

- Q 1.** Montrer que  $S_n$  et  $X_{n+1}$  sont indépendantes.
- Q 2.** Expliciter le calcul de la fonction génératrice  $G_{X_1}$  de la variable aléatoire  $X_1$ .
- Q 3.** Justifier que  $\forall t \in \mathbb{R}, G_{S_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n$ .
- Q 4.** Montrer que la variable aléatoire  $S_n$  suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

**I.B –**

**Q 5.** Vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$n! \left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) = e^{-n/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n! n^k}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

**Q 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k \leq \frac{n! n^k}{(n+k)!} \leq 1.$$

**Q 7.** Montrer que la série de fonctions  $\sum u_k$  où pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $u_k$  est définie sur  $[0, +\infty[$  par  $u_k : x \mapsto (1+kx)^{-k} (1/2)^k$  est normalement convergente sur  $[0, +\infty[$ .

**Q 8.** En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k \geq 1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$  converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.$$

**Q 9.** En déduire que, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$P(S_n > n) \sim \frac{e^{-n/2}}{n!} \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

**Q 10.** En déduire, à l'aide de la formule de Stirling, qu'il existe un réel  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $P(S_n > n) = O(\alpha^n)$ .

## II Quelques résultats sur les matrices

L'objectif de cette partie est de démontrer un certain nombre de résultats d'algèbre linéaire qui serviront dans la partie suivante.

### Notations

- $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $\text{sp}(A)$  l'ensemble des valeurs propres complexes de  $A$  et pour  $\lambda \in \text{sp}(A)$ ,  $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$ . On note  $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{sp}(A)\}$ .
- On dit que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est *positive* si tous ses coefficients sont positifs. On note alors  $A \geq 0$ .
- On dit que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est *strictement positive* si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors  $A > 0$ .
- Un vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit *positif* si tous ses coefficients sont positifs. On note alors  $x \geq 0$ .
- Un vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit *strictement positif* si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors  $x > 0$ .
- On définit une relation d'ordre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par  $A \geq B$  si  $A - B \geq 0$ .
- On définit une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}^n$  par  $x \geq y$  si  $x - y \geq 0$ .
- Si  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  alors  $|A|$  désigne la matrice  $|A| = (|a_{i,j}|)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- Si  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$  alors  $|x|$  désigne le vecteur  $|x| = (|x_i|)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ .
- On dit que  $\lambda_0 \in \text{sp}(A)$  est une *valeur propre dominante* de  $A$  si, pour tout  $\lambda \in \text{sp}(A) \setminus \{\lambda_0\}$ ,  $|\lambda_0| > |\lambda|$ .

On se propose de démontrer les deux propositions suivantes :

---

#### Proposition 1

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice strictement positive, alors  $\rho(A)$  est une valeur propre dominante de  $A$ . Le sous-espace propre associé  $\ker(A - \rho(A)I_n)$  est de dimension 1 et est dirigé par un vecteur propre strictement positif.

---

#### Proposition 2

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice strictement positive diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , si  $Y$  est un vecteur positif non nul de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$  converge, lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ , soit vers le vecteur nul, soit vers un vecteur directeur strictement positif de  $\ker(A - \rho(A)I_n)$ .

---

**Dans toute cette partie II,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice strictement positive.**

### II.A –

**Q 11.** Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{cases} x \geq 0 \implies Ax \geq 0, \\ x \geq 0 \text{ et } x \neq 0 \implies Ax > 0. \end{cases}$$

**Q 12.** Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^k > 0$ .

**Q 13.** En déduire que  $\rho(A) > 0$  puis montrer que  $\rho\left(\frac{A}{\rho(A)}\right) = 1$ .

**Q 14.** On suppose  $A$  diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . Montrer que, si  $\rho(A) < 1$  alors  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$ .

**Dans la suite du problème, on admettra que cette dernière implication est vraie même si la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .**

**II.B –** On suppose, dans les sous-parties II.B et II.C, que  $A$  est une matrice strictement positive vérifiant  $\rho(A) = 1$ .

On considère une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  de  $A$  de module 1 et  $x$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . On se propose de démontrer que 1 est valeur propre de  $A$ .

**Q 15.** Montrer que  $|x| \leq A|x|$ .

Dans les questions qui suivent, on suppose que  $|x| < A|x|$ .

**Q 16.** Montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $A^2|x| - A|x| > \varepsilon A|x|$ .

**Q 17.** On pose  $B = \frac{1}{1 + \varepsilon} A$ . Montrer que pour tout  $k \geq 1$ ,  $B^k A|x| \geq A|x|$ .

**Q 18.** Déterminer  $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k$ .

**Q 19.** Conclure.

**II.C –**

**Q 20.** Montrer que  $A$  admet un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre 1.

**Q 21.** Montrer que 1 est la seule valeur propre de module 1 de  $A$ .

On pourra admettre sans démonstration que si  $z_1, z_2, \dots, z_k$  sont des nombres complexes, tous non nuls, tels que  $|z_1 + \dots + z_k| = |z_1| + \dots + |z_k|$ , alors  $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \exists \lambda_j \in \mathbb{R}^+$  tel que  $z_j = \lambda_j z_1$ .

**Q 22.** Montrer que  $\dim(\ker(A - I_n)) = 1$ .

**Q 23.** En regroupant les résultats des sous-parties II.B et II.C, justifier qu'on a démontré la proposition 1.

**II.D –** Dans cette sous-partie, on se propose de démontrer la proposition 2.

On suppose donc que  $A$  est strictement positive et diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

Pour tout  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note  $Y_p = \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$ .

**Q 24.** Soit  $\lambda \in S = \text{sp}(A) \setminus \{\rho(A)\}$ . Soit  $Y \in \ker(A - \lambda I_n)$ . Montrer que la suite  $(Y_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.

**Q 25.** Soit  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  un vecteur positif. Montrer que la suite  $(Y_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  converge vers le projeté de  $Y$  sur  $E_{\rho(A)}(A)$  parallèlement à  $\bigoplus_{\lambda \in S} E_\lambda(A)$ . Vérifier que, s'il est non nul, ce dernier vecteur (le projeté de  $Y$ ) est strictement positif.

**Dans la suite du problème, on admet que la proposition 2 se généralise à toute matrice  $A$  strictement positive, même non diagonalisable et que, si  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est un vecteur strictement positif, alors la suite  $(Y_p)$  converge vers un vecteur strictement positif dirigeant  $E_{\rho(A)}(A)$ .**

**II.E –** Cette sous-partie permet de déterminer la valeur propre dominante  $\rho(A)$  d'une matrice carrée  $A$  strictement positive de taille  $n \geq 2$ .

**Q 26.** Justifier que pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $A^k$  est semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à une matrice triangulaire, dont on précisera les coefficients diagonaux.

**Q 27.** Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{tr}(A^{k+1})}{\text{tr}(A^k)} = \rho(A)$ .

### III Une inégalité pour les chaînes de Markov

Dans toute cette partie III,  $N$  est un entier naturel non nul fixé et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'intervalle d'entiers  $\llbracket 0, N \rrbracket$ .

On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (i_1, i_2, \dots, i_{n+1}) \in \llbracket 0, N \rrbracket^{n+1}$ ,

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n).$$

On suppose que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2$ ,  $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$  ne dépend pas de  $n$  et est strictement positif. On note alors  $q_{i,j} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ .

On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une *chaîne de Markov homogène* sur  $\llbracket 0, N \rrbracket$ , de *matrice de transition*  $Q$ .

On attire l'attention sur les faits suivants :

- la numérotation des lignes et des colonnes de  $Q$  commence à 0 ;
- $Q$  est une matrice carrée de taille  $N + 1$ .

Dans toute la suite, pour  $n \geq 1$  fixé, on pose  $\Pi_n$  la matrice colonne  $\begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$ .

#### III.A – Justification de l'existence des lois $(\Pi_n)_{n \geq 1}$

**Q 28.** Justifier que  $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, \sum_{j=0}^N q_{i,j} = 1$ .

**Q 29.** Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, \Pi_{n+1} = Q^\top \Pi_n$ .

**Q 30.** En déduire que la loi de  $X_1$  détermine entièrement les lois de toutes les variables aléatoires  $X_n, n \in \mathbb{N}^*$ .

Dans toute la suite, on considère une telle chaîne de Markov, et on pose

- $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  ;
- $a_{i,j}(t) = q_{i,j} e^{jt}$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2$  et tout  $t \in \mathbb{R}$  ;
- $A(t) = (a_{i,j}(t))_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$  ;
- $z_j(t) = P(X_1 = j) e^{jt}$  pour tout  $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$  et tout  $t \in \mathbb{R}$  ;
- $Z(t) = \begin{pmatrix} z_0(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})(\mathbb{R})$ .

#### III.B – Définition de la fonction de taux $\lambda$

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $t$  un réel fixé.

On admet que l'espérance de la variable aléatoire  $e^{tS_n}$  est égale

$$E(e^{tS_n}) = \sum_{j=0}^N Y_j^{(n)}(t)$$

où  $Y^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} Y_0^{(n)}(t) \\ \vdots \\ Y_N^{(n)}(t) \end{pmatrix}$  est le vecteur colonne défini par  $Y^{(n)}(t) = (A(t))^{n-1} Z(t)$ .

**Q 31.** Justifier que  $A(t)$  possède une valeur propre dominante  $\gamma(t) > 0$ .

**Q 32.** Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(E(e^{tS_n}))}{n} = \lambda(t)$  où  $\lambda(t) = \ln(\gamma(t))$ .

**III.C** – Dans cette sous-partie, on étudie deux programmes écrits en langage Python. On suppose que la bibliothèque `numpy` a été importée à l'aide de l'instruction

```
import numpy as np
```

On rappelle que les opérations suivantes sont alors disponibles.

- `range(n)` renvoie la séquence des  $n$  premiers entiers ( $0 \rightarrow n - 1$ ).
- `np.array(u)` crée un nouveau tableau contenant les éléments de la séquence  $u$ . La taille et le type des éléments de ce tableau sont déduits du contenu de  $u$ .
- `a.shape(a)` renvoie un tuple donnant la taille du tableau  $a$  pour chacune de ses dimensions.
- `a.trace(a)` donne la trace du tableau  $a$ .
- `np.exp(a)` renvoie un tableau de même forme que le tableau  $a$  dont chaque terme est l'exponentielle du terme correspondant du tableau  $a$  (exponentielle terme à terme).
- `np.dot(a, b)` calcule le produit matriciel des tableaux  $a$  et  $b$  (sous réserve de compatibilité des dimensions).
- `x * a` renvoie un tableau de même forme que le tableau  $a$  correspondant au produit de chaque terme de  $a$  par le nombre  $x$ .
- `a * b` renvoie un tableau correspondant au produit terme à terme des deux tableaux  $a$  et  $b$ . Si  $a$  et  $b$  n'ont pas le même nombre de dimensions, le plus « petit » est virtuellement étendu afin de correspondre à la forme du plus « grand ». Par exemple si  $a$  est une matrice et  $b$  un vecteur,  $b$  doit avoir le même nombre de composantes que  $a$  a de lignes, il est alors virtuellement transformé en matrice avec le même nombre de colonnes que  $a$ , chaque colonne valant  $b$ .

**Q 33.** Écrire en langage Python une fonction `puiss2k` qui prend en argument une matrice carrée  $M$  et un entier naturel  $k$  et renvoie la matrice  $M^{2^k}$  en effectuant  $k$  produits matriciels. On pourra exploiter le fait que  $M^{2^{k+1}} = M^{2^k} M^{2^k}$ .

**Q 34.** Expliquer ce que fait la fonction Python `maxSp` définie par :

```
1 def maxSp(Q:np.ndarray, k:int, t:float) -> float:
2     n = Q.shape[1]
3     E = np.exp(t * np.array(range(n)))
4     A = Q * E
5     B = puiss2k(A, k)
6     C = np.dot(A, B)
7     return C.trace() / B.trace()
```

### III.D – Une majoration théorique et son interprétation

On définit, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda^*(x) = \sup_{t \geq 0} (tx - \lambda(t))$ .

On admet que cette borne supérieure existe et que la convergence de la suite de fonctions  $\left( t \mapsto \frac{\ln(E(e^{tS_n}))}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers la fonction  $t \mapsto \ln(\gamma(t))$  démontrée à la question 32 est uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ . On admet également dans toute la suite l'existence de  $m = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E(S_n)$  ainsi que les propriétés suivantes de  $\lambda^*$  :

$$\begin{cases} \lambda^*(x) = 0 & \text{pour tout } x \leq m, \\ \lambda^*(x) > 0 & \text{pour tout } x > m. \end{cases}$$

Dans toute la suite,  $\varepsilon$  désigne un réel strictement positif.

**Q 35.** Montrer qu'il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$n \geq n_0 \implies \ln(E(e^{tS_n})) \leq n(\lambda(t) + \varepsilon)$$

**Q 36.** À l'aide de l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire  $e^{tS_n}$ , montrer que pour  $a > 1$ ,  $n \geq n_0$  et  $t \geq 0$ ,

$$P(S_n \geq nam) \leq e^{-ntam} e^{n(\lambda(t) + \varepsilon)}.$$

**Q 37.** En déduire que pour  $n \geq n_0$ ,

$$P(S_n \geq nam) \leq e^{-n(\lambda^*(am) - \varepsilon)}.$$

**Q 38.** Donner un sens concret à  $m$  en rapport avec le processus industriel étudié et interpréter l'inégalité précédente. On pourra établir un lien intuitif avec la loi des grands nombres.

**III.E** – Cette sous-partie constitue une application numérique et peut être traitée en admettant les résultats précédents.

On dispose de deux suites finies de réels  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_K$  ( $K \geq 2$ ) et  $x_1 < x_2 < \dots < x_L$  ( $L \geq 2$ ). La formule de la question 32 appliquée en  $t_i$  avec  $n$  suffisamment grand permet d'estimer  $\lambda(t_i)$  par une valeur approchée  $\hat{\lambda}(t_i)$ .

**Q 39.** Justifier que pour tout  $i \in \{1, \dots, L\}$ ,

$$\hat{\lambda}^*(x_i) = \max_{1 \leq j \leq K} (t_j x_i - \hat{\lambda}(t_j))$$

constitue une valeur approchée raisonnable de  $\lambda^*(x_i)$ .

Le tableau 1 donne ces valeurs pour  $L = 20$ .

$x_i$	4,50	4,55	4,60	4,65	4,70
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$4,1 \times 10^{-12}$	$4,1 \times 10^{-12}$	$4,1 \times 10^{-12}$	$4,1 \times 10^{-12}$	$4,1 \times 10^{-12}$
$x_i$	4,75	4,80	4,85	4,90	4,95
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$5,1 \times 10^{-4}$	$5,5 \times 10^{-3}$	$1,1 \times 10^{-2}$	$1,6 \times 10^{-2}$	$2,1 \times 10^{-2}$
$x_i$	5,00	5,05	5,10	5,15	5,20
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$2,6 \times 10^{-2}$	$3,1 \times 10^{-2}$	$3,6 \times 10^{-2}$	$4,1 \times 10^{-2}$	$4,6 \times 10^{-2}$
$x_i$	5,25	5,30	5,35	5,40	5,45
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$5,1 \times 10^{-2}$	$5,6 \times 10^{-2}$	$6,1 \times 10^{-2}$	$6,6 \times 10^{-2}$	$7,1 \times 10^{-2}$

**Tableau 1**

**Q 40.** À l'aide du tableau 1, donner un encadrement approximatif de la valeur de  $m$  et la valeur d'un réel  $h > 0$  tel qu'il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  vérifiant pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$P(S_n > 1, 1 \times nm) \leq e^{-nh}.$$

---

• • • FIN • • •

---