Mathématiques 2

PSI

2024

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Autour de la série harmonique et de la constante d'Euler

Dans toute ce problème, on désigne par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme général est donné par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$$

Le but de ce problème est dans un premier temps de s'assurer de la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis d'essayer de déterminer différentes expressions de sa limite, à l'aide d'intégrales.

I Convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q 1. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la différence $a_{n+1}-a_n$, puis déterminer la nature de la série numérique $\sum(a_{n+1}-a_n)$.

Q 2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel que l'on notera γ pour toute la suite du problème, puis que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+\gamma+\mathrm{o}(1).$$

II Application au problème du collectionneur de vignettes

Pour augmenter ses ventes, un industriel de l'agro-alimentaire qui commercialise des paquets de céréales pour le petit déjeuner décide d'insérer au fond du paquet une figurine de sportifs célèbres. Le modèle de figurine inséré dans le paquet est choisi de manière équiprobable parmi n modèles de référence.

Pour différencier les n modèles de figurines et les identifier de manière unique, on considèrera que chaque modèle de figurine porte un numéro unique entre 1 et n.

Chaque paquet de céréales contient ainsi une figurine à collectionner, que l'on ne découvre qu'à l'ouverture du paquet. On se demande combien un consommateur, que l'on va appeler ici le " collectionneur ", doit ouvrir de paquets pour posséder au moins un exemplaire de chacune des n figurines.

On décompose ce nombre de paquets N_n en $N_n=\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n$ où τ_k est le nombre de paquets supplémentaires nécessaires pour obtenir k figurines différentes quand on en a déjà $k-1$ différentes.

Dans tout ce qui suit, on désignera par $C_k^{(i)}$ lévénénement "le collectionneur découvre dans le k^{e} paquet la figurine numérotée i "

Q 3. Déterminer la loi de N_1.

Q 4. Soit $m\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Quelle est la probabilité de l'événement C : "le collectionneur obtient toujours la même vignette au cours de ses m premiers achats" ?

En déduire que : $\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(N_2>m)=\dfrac{1}{n^{m-1}}.$

Q 5. Déterminer alors la loi de N_2.

Q 6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que τ_k suit une loi géométrique, dont on précisera le paramètre.

Q 7. En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n et établir que :

$$\mathbb{E}\left(N_n\right) \underset{n \to +\infty}{=} n\left(\ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)\right).$$

Q 8. Justifier l'indépendance des variables aléatoires τ_1, τ_2,..., τ_n.

Q 9. On rappelle par ailleurs que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Démontrer que N_n admet une variance et que : $\mathbb{V}\left(N_n\right) \leqslant \frac{n^2 \pi^2}{6}$.

Q 10. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}\left(\left|N_n - \mathbb{E}\left(N_n\right)\right| > \varepsilon n \ln(n)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Q 11. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n \ln(n)} - 1\right| > \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

III Une première expression intégrale de γ

On admettra le résultat suivant : pour tous réels a et b strictement positifs, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{at}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{bt}}}{t} \mathrm{dt}$ est convergente, et on a $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{at}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{bt}}}{t} \mathrm{dt} = \ln\left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)$.

Q 12. Démontrer que : $\forall t > 0,\ \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{nt}} - \mathrm{e}^{-(\mathrm{n}+1)\mathrm{t}}}{t}$.

Q 13. En déduire que : $\forall t > 0,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}} - \frac{1}{\mathrm{t}}\right) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-(\mathrm{n}+1)\mathrm{t}} - \frac{\mathrm{e}^{-(\mathrm{n}+1)\mathrm{t}} - \mathrm{e}^{-(\mathrm{n}+2)\mathrm{t}}}{\mathrm{t}}\right)$.

Q 14. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}} - \frac{1}{\mathrm{t}}\right) \mathrm{dt}$ est convergente et que l'on a :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}} - \frac{1}{\mathrm{t}}\right) \mathrm{dt}.$$

IV Une deuxième expression intégrale de γ

Q 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la continuité en 0 de la fonction $t \longmapsto \frac{1 - (1 - t)^n}{t}$.

Q 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que : $\int_0^1 (1 - t)^{n-1} \mathrm{dt} = \frac{1}{\mathrm{n}}$

exprimer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ à l'aide d'une intégrale puis à l'aide d'un changement de variable affine, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} \mathrm{du} - \int_1^{\mathrm{n}} \frac{\left(1 - \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{u}} \mathrm{du}.$$

Q 17. Soit $x \in [1,+\infty[$. Déterminer la limite sous forme d'une intégrale quand n tend vers $+\infty$ de la suite dont le terme général est $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$.

Q 18. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : \begin{cases} [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n}{t} & \text{si } 1\leqslant t\leqslant n \\ 0 & \text{si } n<t \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 19. Démontrer que l'on a : $\forall t \in [0,1[\,,\ \ln(1-t) \leqslant -t$.

Q 20. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{du}$.

Q 21. Justifier l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ des fonctions f_n définies dans la question précédente.

Q 22. Établir la convergence, puis déterminer la limite sous forme d'une intégrale quand n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général

$$\int_1^n \frac{\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n}{u}\mathrm{du}.$$

Q 23. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{du}$.

Q 24. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \,]0,1]\,,\ 0 \leqslant \frac{1-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n}{t} \leqslant 1.$$

Q 25. Établir la convergence, puis déterminer la limite sous forme d'une intégrale quand n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général

$$\int_0^1 \frac{1-\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n}{u}\mathrm{du}.$$

Q 26. En déduire que : $\displaystyle\gamma = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{du} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\mathrm{u}}\mathrm{du}.$

V Deux autres expressions intégrales de γ

Sous réserve que cela ait du sens, on appelle fonction Γ la fonction donnée par :

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathrm{dt}.$$

On désignera par u la fonction de deux variables définie par : $u : \begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathrm{R} \\ (x,t) & \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} \end{cases}$

Q 27. Montrer que Γ est définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Q 28. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.

Q 29. Établir que : $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Q 30. On admet la formule de Weierstrass :

$$(W):\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma \mathrm{x}} \prod_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}} \left(1 + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}\right)\right)$$

À l'aide de la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$, montrer que :

$$\forall x > 0,\ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$$

Q 31. En déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma$, et calculer alors $\Gamma'(2)$.

Q 32. À l'aide d'un changement de variables, montrer que l'on a $\gamma = -\displaystyle\int_0^1 \ln(-\ln(t))\,\mathrm{d}t$.

VI Recherche d'une valeur approchée de γ

Dans toute cette partie, A désigne un réel strictement positif.

Q 33. Démontrer que : $\gamma = -\ln(A) + \displaystyle\int_0^A \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{u}\mathrm{du} - \int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{\mathrm{u}}\mathrm{du}.$

Q 34. Établir la convergence de la série numérique $\sum \dfrac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!}$, puis en donner sa somme à l'aide d'une intégrale.

Q 35. Démontrer que : $\forall x > 0,\ \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{u}\mathrm{du} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{\mathrm{x}} - \int_{\mathrm{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{\mathrm{u}^2}\mathrm{du}$

Q 36. Déterminer l'expression d'un polynôme R de degré 2 à coefficients réels tel que :

$$\forall x > 0,\ \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{u}\mathrm{du} = \frac{\mathrm{R(x)e^{-x}}}{\mathrm{x}^3} - \int_{\mathrm{x}}^{+\infty} \frac{6\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{\mathrm{u}^4}\mathrm{du}$$

Q 37. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > A+1$. Justifier alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\gamma - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!} - \frac{R(A)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}}{A^3} + \ln(A)\right| \leqslant \frac{A^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} + \frac{6\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}}{A^4}$$

VII Étude d'une série entière aux bornes de son disque ouvert de convergence

L'objet de cette partie du problème est d'étudier le comportement de la somme f de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \ln(n)x^n$ de la variable réelle x aux bornes de son intervalle ouvert de convergence.

VII.A – Rayon de convergence et première expression de la somme.

Q 38. Démontrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$, est de rayon de convergence égal à 1, puis préciser le domaine de définition de la fonction f.

VII.B – Étude de f en 1.

Q 39. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers 1 par valeur inférieure.

Q 40. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n$ de la variable réelle x dont on note alors g sa somme.

Q 41. À l'aide des deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ montrer que :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\ g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$$

Q 42. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que : $\quad \forall x \in [0,1[\,,\ |f(x)-g(x)| \leqslant \frac{M}{1-x}$.

Q 43. En déduire que $f(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} g(x)$.

VII.C – Étude de f en -1.

On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est donné par :

$$\begin{cases} c_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ c_n = -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \end{cases}$$

Q 44. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} c_n x^n$ de la variable réelle x, dont on note alors h sa somme, est égal à 1, puis préciser le domaine de définition de h.

Q 45. Montrer que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ converge vers la constante $-\gamma$.

Q 46. La fonction h est-elle continue en 1 ?

Q 47. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{2p}(-1)^k c_k = \ln\left(\frac{2^{4p}(p!)^4}{2p\left((2p)!\right)^2}\right) + \sum_{k=1}^{2p}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Q 48. On rappelle que la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et que $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Montrer que $f(x) \underset{\substack{x\to -1\\ x>-1}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

On pourra au préalable déterminer une relation entre f et h sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

• • • FIN • • •
