Mathématiques 2

PSI

2021

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Autour des fonctions hypergéométriques

Objectif

L'objectif du problème est l'étude de suites, séries et fonctions dites *hypergéométriques* et d'en donner quelques exemples en analyse et en probabilités.

La partie I introduit la notion de suites et séries hypergéométriques. La partie II, indépendante de la partie I, définit la fonction Γ, permettant d'étendre la factorielle à des valeurs non entières. La partie III, qui s'appuie sur certains résultats des deux premières parties, introduit deux familles de fonctions hypergéométriques. Les parties IV et V, indépendantes l'une de l'autre, donnent des exemples de fonctions hypergéométriques, respectivement dans le cadre d'une famille de polynômes et dans un contexte probabiliste.

Notations

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On note $\binom{n}{p}$ le coefficient binomial p parmi n, égal à $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leqslant n$ et égal à 0 sinon.

On note $D = \mathbb{R} \setminus \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers négatifs ou nuls.

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, les deux notations $f^{(n)}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ sont utilisées pour la dérivée n-ième de f.

I Suites et séries hypergéométriques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *hypergéométrique* lorsqu'il existe deux polynômes non nuls P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}. \tag{I.1}$$

On dit alors que P et Q sont des polynômes *associés* à la suite hypergéométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On dit également qu'une série entière $\sum u_n x^n$ est une série hypergéométrique lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est hypergéométrique.

Q 1. Montrer qu'une suite géométrique est hypergéométrique.

Q 2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \binom{n}{p}$ est hypergéométrique.

Q 3. Démontrer que l'ensemble des suites vérifiant la relation (I.1), avec

$$P(X) = X(X-1)(X-2) \qquad \text{et} \qquad Q(X) = X(X-2),$$

est un espace vectoriel dont on précisera une base et la dimension.

Q 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite hypergéométrique de polynômes associés P et Q. On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $P(n_0) = 0$ et, $\forall n \geqslant n_0$, $Q(n) \neq 0$. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

II Extension de la factorielle

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Q 5. Justifier qu'on définit ainsi une fonction sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q 6. Montrer que la fonction Γ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q 7. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{II.1}$$

Q 8. Déterminer la valeur de $\Gamma(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On admet qu'on peut prolonger la fonction Γ sur D par une fonction continue, toujours notée Γ, qui vérifie la relation (II.1) pour tout $x \in D$.

III Fonctions hypergéométriques

III.A – Symbole de Pochhammer

On définit le symbole de Pochhammer, pour tout nombre réel a et tout entier naturel n par

$$[a]_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(a+k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 9. Si a est un entier négatif ou nul, justifier que la suite $\left([a]_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Q 10. Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $[a]_{n+1} = a[a+1]_n$.

Q 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de $[a]_n$

— à l'aide de factorielles lorsque $a \in \mathbb{N}^*$;

— à l'aide de deux valeurs de la fonction Γ, lorsque $a \in D$.

III.B – Fonction hypergéométrique de Gauss

Étant donné trois nombres réels a, b et c, on appelle *fonction hypergéométrique de Gauss* associée au triplet (a, b, c), la fonction, définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, par

$$F_{a,b,c}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \frac{x^n}{n!}.$$

Q 12. Justifier que, si $c \in D$, alors $\dfrac{[a]_n [b]_n}{[c]_n}$ est bien défini pour tout entier naturel n.

On suppose cette condition vérifiée dans les questions suivantes.

Q 13. Montrer que la série entière $\sum \dfrac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \dfrac{x^n}{n!}$ est hypergéométrique et préciser des polynômes associés.

Q 14. Réciproquement, démontrer que l'ensemble des séries hypergéométriques associées aux polynômes obtenus à la question précédente est un espace vectoriel dont on donnera une base et dont on précisera la dimension.

Q 15. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{[a]_n [b]_n}{[c]_n} \dfrac{x^n}{n!}$.

Q 16. Justifier que $F_{a,b,c}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$. Calculer sa dérivée et l'exprimer à l'aide d'une fonction hypergéométrique de Gauss.

Q 17. Justifier que $F_{a,b,c}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et exprimer sa dérivée n-ième à l'aide d'une fonction hypergéométrique de Gauss.

Q 18. Exprimer la fonction $x \mapsto F_{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}}(-x^2)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Q 19. Exprimer la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1,1[\setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

à l'aide d'une fonction hypergéométrique de Gauss.

On admet, en cas d'existence de toutes les quantités présentes dans l'expression suivante, que

$$F_{a,b,c}(1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Q 20. Soient $N \in \mathbb{N}$, $c \in D$, $a \in \mathbb{R}$ tels que $c - a \in D$. Justifier l'existence de $F_{a,-N,c}(1)$ et démontrer que

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \frac{[a]_k}{[c]_k} = \frac{[c-a]_N}{[c]_N}.$$

Q 21. Soit $(u,v) \in \mathbb{N}^2$ tels que $N \leqslant \min(u,v)$. En prenant $a = -u$ et $c = v - N + 1$, montrer l'identité de Vandermonde :

$$\binom{u+v}{N} = \sum_{k=0}^{N} \binom{u}{k} \binom{v}{N-k}.$$

On admet pour la suite que l'identité de Vandermonde reste valable pour tous entiers naturels u, v, N.

Q 22. Donner une interprétation combinatoire de l'identité de Vandermonde.

III.C – Fonction hypergéométrique confluente

Soient deux nombre réels a et c tels que $c \in D$.

Q 23. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$xy''(x) + (c-x)y'(x) - ay(x) = 0. \tag{III.1}$$

On exprimera ces solutions à l'aide du symbole de Pochhammer et on précisera la structure algébrique de leur ensemble.

On note $M_{a,c}$ la solution de l'équation (III.1) vérifiant $M_{a,c}(0) = 1$. Cette fonction est appelée *fonction hypergéométrique confluente* associée au couple (a,c).

IV Les polynômes de Laguerre

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout nombre réel x,

$$\Phi_n(x) = \mathrm{e}^{-x} x^n \qquad \text{et} \qquad L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \Phi_n^{(n)}(x).$$

Q 24. Déterminer L_0, L_1, L_2 et L_3.

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul.

Q 25. En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que la fonction L_n est polynomiale de degré n. Déterminer les coefficients $c_{n,k}$ tels que $L_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} x^k$.

Q 26. Pour tout nombre réel x, exprimer $\Phi_n^{(n)}(x)$ et $\Phi_n^{(n+1)}(x)$ en fonction de $L_n(x)$ et $L'_n(x)$.

Q 27. Utiliser l'égalité $\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^{n+1} x\Phi_n(x)}{\mathrm{d}x^{n+1}}$, que l'on justifiera, pour démontrer l'égalité

$$L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x) + \frac{x}{n+1} L'_n(x)$$

valable pour tout nombre réel x.

Q 28. Utiliser l'égalité $\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}\Phi_{n+1}^{(1)}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x)$ pour démontrer l'égalité

$$L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$$

valable pour tout nombre réel x.

Q 29. En déduire que L_n est solution de l'équation différentielle

$$xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0. \tag{IV.1}$$

Q 30. Montrer que L_n est une fonction hypergéométrique confluente.

V Loi hypergéométrique

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soient deux entiers naturels A et n tels que $n \leqslant A$ et p un nombre réel compris entre 0 et 1. On suppose $pA \in \mathbb{N}$ et on note $q = 1 - p$.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X suit la *loi hypergéométrique* de paramètres n, p et A lorsque

$$\begin{cases} X(\Omega) \subset [\![0, n]\!], \\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\dbinom{pA}{k}\dbinom{qA}{n-k}}{\dbinom{A}{n}} \quad \text{pour tout } k \in [\![0, n]\!]. \end{cases}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$.

V.A – Premiers résultats

Q 31. Vérifier qu'on a bien défini une loi de probabilité.

Q 32. Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$. Calculer l'espérance de X.

On rappelle que, pour tous entiers naturels non nuls k et N, $k\dbinom{N}{k} = N\dbinom{N-1}{k-1}$.

Q 33. Montrer que la suite $(\mathbb{P}(X = k))_{k \in \mathbb{N}}$ est hypergéométrique. En déduire une expression de la fonction génératrice de X à l'aide d'une fonction hypergéométrique.

V.B – Modélisation

On considère deux urnes contenant chacune A boules dont pA sont blanches et qA sont noires. On tire simultanément, de manière équiprobable, n boules dans la première urne. On note Y le nombre de boules blanches obtenues. On tire également, de manière équiprobable, n boules dans la deuxième urne, mais successivement et avec remise. On note Z le nombre de boules blanches obtenues.

Q 34. Quelle est la loi de la variable Z ? Donner l'espérance et la variance de Z.

Q 35. Démontrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, A)$.

V.C – Calcul de la variance

On se propose d'utiliser la modélisation du tirage dans la première urne pour retrouver la valeur de l'espérance et pour calculer la variance d'une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, p, A)$.

Pour cela, on numérote de 1 à pA chacune des boules blanches contenues dans la première urne et, pour tout entier naturel $i \in [\![1, pA]\!]$, on pose

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la boule numérotée } i \text{ a été tirée,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 36. Exprimer Y à l'aide des Y_i et retrouver la valeur de l'espérance de Y. La comparer à celle de Z.

Q 37. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant pA$, démontrer que la variable aléatoire $Y_i Y_j$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

Q 38. En déduire la valeur de la variance de Y. La comparer à celle de Z.

V.D – Résultats asymptotiques

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{H}(n, p, A)$. On fixe n et p. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

Q 39. Montrer que $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Q 40. Interpréter ce résultat en lien avec ceux obtenus pour l'espérance et la variance de Y.

• • • FIN • • •