1/ REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet comportait deux problèmes. Le problème 1 était un court problème d'algèbre linéaire qui portait sur l'étude de certaines propriétés des matrices symétriques. Le problème 2, plus long, était un problème d'analyse visant à établir le lemme de Riemann-Lebesgue, puis à calculer l'intégrale de Dirichlet et enfin à étudier le phénomène de Gibbs en utilisant les résultats démontrés précédemment.

Le sujet était long et aucun candidat n'a traité l'ensemble des deux problèmes. On retrouve de nombreuses copies ne traitant qu'une petite partie du sujet et montrant le niveau très faible de certains candidats. Outre un manque évident de maîtrise des notions fondamentales du cours, le fait le plus marquant relevé par l'ensemble des correcteurs est la faiblesse en calcul des candidats et les très grandes difficultés à manipuler des inégalités simples. Cela a été particulièrement frappant dans le problème 2 où les fonctions considérées étaient à valeurs complexes et où une partie très importante des candidats a écrit des inégalités impliquant ces fonctions sans considérer leurs modules, ce qui n'a évidemment pas de sens.

Comme les années précédentes, les correcteurs ont eu le plaisir de trouver des copies généralement bien présentées, avec les résultats mis en évidence, même s'il reste quelques copies extrêmement difficiles à déchiffrer et d'autres à l'orthographe originale.

Rappelons aux candidats qu'il est nécessaire de justifier toutes les affirmations et arguments proposés et qu'un théorème doit systématiquement être cité et ses hypothèses vérifiées. Le théorème de convergence dominée est par exemple trop souvent utilisé dans des cas où il ne s'applique pas et sans en vérifier les hypothèses.

2/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

2.1/ Problème 1

De manière générale, ce problème a été mieux traité que le second, et la partie I de ce problème a été mieux réussie que la seconde.

2.1.1/ Partie I

La plupart des candidats savent trouver les valeurs propres de la matrice A même si on peut s'étonner que certains peinent à calculer les racines de X^2+t^2. Les calculs de R sont effectués avec plus ou moins de réussite suivant la méthode utilisée (parfois très lourde avec résolution de système ou à l'inverse très rapide avec quelquefois l'usage de la calculatrice). Il faut noter toutefois un nombre assez conséquent de candidats qui, se trompant dans le calcul de $(I_2-A)^{-1}$, arrivent à $R = I_2$sans que ça ne les fasse réagir. Il peut être judicieux de vérifier son calcul de la matrice inverse. Notons également l'oubli classique consistant à se contenter de montrer qu'une matrice est de déterminant 1 pour en conclure qu'elle fait partie du groupe spécial orthogonal. Notons également que certains candidats n'hésitent pas à se "débrouiller" pour obtenir un déterminant égal à 1 alors qu'ils oublient de mettre au carré le scalaire devant la matrice.

2.1.2/ Partie II

La question Q4 a été traitée par presque tous les candidats, ce qui n'est pas le cas de la Q5. Bien souvent, l'argumentation se borne à écrire $\lambda^t X\overline{X} = -^t XA\overline{X}$. Lorsque cela va plus loin, il est trop rarement précisé que la matrice A est réelle avant d'affirmer que $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$. Certains candidats n'ont pas conscience de la nature des objets manipulés et se retrouvent avec des absurdités telles que $\lambda = X$ ou $\lambda = A$. Trop peu de candidats savent utiliser le résultat de Q5 pour prouver simplement que I_n+A est inversible. L'utilisation de Q4 a en revanche été globalement bien vue. En Q7, beaucoup de candidats n'aboutissent qu'à une expression partielle et n'exploitent pas le caractère antisymétrique de A. Enfin en Q8, les tentatives aboutissent assez rarement et la Q9 a été la plupart du temps sautée.

2.2/ Problème 2

Le problème était divisé en trois parties.

2.2.1/ Partie I

Le début de la première partie a été abordé par tous les candidats. Une partie importante des candidats a vu (ou se souvenait) qu'il fallait passer par une intégration par parties pour résoudre Q10. Les majorations qui suivent et servent à prouver la convergence sont trop souvent hasardeuses et le caractère C^1 de la fonction f n'est pas assez mis en avant. Ceux qui ont tenté de s'en sortir sans intégration par parties ont écrit des horreurs. C'est ainsi qu'on voit régulièrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(nt) = 0$.

Dans Q11, le caractère 2π-périodique de la primitive Φ de φ s'annulant en 0 est maladroitement montré. Notons que de trop nombreux candidats pensent qu'il suffit de montrer que $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ pour en déduire que Φ est 2π-périodique. Le caractère borné de Φ est souvent sauté, lorsque d'autres candidats se contentent de dire que Φ est bornée car continue (sans préciser que le caractère périodique est essentiel). Ceux qui ont donné plus de détails l'ont bien fait en général.

La question Q12 a montré la grande faiblesse des candidats dans la manipulation des inégalités. Dans l'ensemble, les candidats ont compris qu'il fallait utiliser l'inégalité triangulaire, mais produisent des arguments très approximatifs. Notons que dans un très grand nombre de copies, les inégalités sont écrites sans modules, ce qui n'a pas de sens. Lorsque l'inégalité triangulaire a été appliquée sur les intégrandes, les modules "sortent de l'intégrale" sans justification. Par ailleurs, beaucoup posent $M = \sup_{[\alpha,\beta]}|\varphi(nt)|$ sans s'apercevoir que le majorant dépend de n. La deuxième partie de la question n'a pratiquement pas été traitée, les candidats n'ayant pas bien conscience de ce qu'implique l'hypothèse "continue par morceaux" et ne voyant pas le lien avec le début de la question.

Q13 est mieux traitée par des candidats connaissant généralement leurs formules de trigonométrie.

2.2.2/ Partie II

Comme pour la première partie, la partie II du problème 2 a été abordée par la majorité des candidats. Presque tous ont su montrer dans Q14 que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ convergeait, même si l'argument de la continuité de la fonction sous l'intégrale manque trop souvent. La fin de la question pousse à effectuer une intégration par parties. Elle est menée à bien par la majorité des candidats (la justification dans le cas des intégrales généralisées étant parfois maladroite), mais n'a pas toujours été utilisée pour justifier la convergence de la seconde intégrale. La formulation de la question a certainement contribué à cela. Rappelons cependant que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est divergente et que beaucoup de candidats semblent l'ignorer.

Les réponses obtenues en Q15 sont décevantes. Le lien avec la question précédente a été trop peu souvent vu et ceux qui ont essayé de réutiliser la question précédente ont trop souvent négligé le problème de la convergence des intégrales en 0.

Un problème comporte toujours une ou plusieurs questions de cours. C'était le cas pour les questions Q16 et Q17. La connaissance des théorèmes à appliquer est trop approximative, les majorations ne sont pas toujours très précautionneuses et les modules souvent oubliés. Pour Q16, rappelons qu'une domination sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$ ne donnera pas la continuité en 0. Quand dans Q17 il s'agit de majorer les dérivées k-ièmes, les candidats affirment sans le vérifier que le majorant a les propriétés escomptées sans le vérifier précisément et notamment en négligeant l'hypothèse "f est bornée". Ces questions mériteraient d'être traitées avec plus de précision. On le regrette d'autant plus qu'elles rapportent des points.

Dans Q18, la sous-question 1 est souvent traitée alors que dans la 2 beaucoup se perdent dans les calculs. Plus curieusement, même lorsqu'ils arrivent à dégager les deux équations qui permettent de trouver α' et β', ils ne vont pas plus loin, sans voir qu'il n'y a là qu'un simple système linéaire à résoudre. Ceux qui y parviennent quand même ne se rendent pas compte que f_1 et f_2 sont les *opposés* de α' et β'. Il faut faire attention à la position des bornes d'intégration ! Dans la suite, le 3 est peu abordé, et certains ont traité le 4 à part, ayant vu la question de cours.

Les question Q19 à Q21 ont été peu et mal traitées. Dans Q19 par exemple, beaucoup ont voulu utiliser le théorème de convergence dominée et ont affirmé que puisque

$$\left|\frac{\sin t}{t+x}\right| \leq \left|\frac{\sin t}{t}\right|$$

et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, le théorème s'applique. Rappelons que cette dernière intégrale n'est pas absolument convergente.

2.2.3/ Partie III

La troisième partie a été abordée de manière parcellaire. Les candidats ont su cependant glaner quelques points en traitant en partie certaines questions.

C'est ainsi que dans Q22, beaucoup se contentent de dériver terme à terme la somme définissant $S_n(x)$. La suite de la question avec la somme géométrique complexe (pourtant classique) est beaucoup plus rarement traitée.

Dans Q23, assez peu de candidats arrivent à l'égalité demandée. En revanche, ils sont plus nombreux à en déduire la valeur de la somme, même si c'est plus rarement correctement démontré.

Q24 est souvent correctement traitée, lorsqu'elle est abordée. Dans Q25, les candidats partent de l'expression définissant S_n (la somme) pour arriver à $S_n(\pi - x) = S_n(x)$. La suite de la question Q25 n'est pratiquement jamais traitée.

Il semble que les candidats qui ont abordé Q26 n'en aient pas toujours saisi le sens, à savoir l'utilisation des symétries et de l'imparité de S_n pour parvenir à la généralisation à $\mathbb{R}$ entier d'un résultat initialement démontré sur $]0, \pi/2]$. Les candidats se focalisent souvent sur les points de discontinuité de la fonction.

Q27, à l'instar du début de Q22, est l'exemple typique de la question sur laquelle de nombreux candidats sont parvenus à engranger quelques points. On peut en dire autant de la continuité de φ au début de Q28.