PSI

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE

MATHÉMATIQUES

1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

Le sujet de mathématiques est écrit pour évaluer les compétences des candidats sur une large partie du programme de PSI. Parmi ces compétences sont systématiquement évaluées :

- la connaissance précise des énoncés et démonstrations des résultats du cours et la capacité à les appliquer ;
- la qualité d'exposition d'un argument, la rigueur ;
- la présentation de la copie.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet comportait deux problèmes indépendants, un d'analyse et un d'algèbre avec une courte application aux probabilités. Dans le problème d'analyse, il était question de la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal et de son expression comme limite d'une suite d'intégrales. Le second problème portait sur l'étude des propriétés spectrales de deux matrices introduites par le probabiliste Mark Kac et se terminait par une utilisation probabiliste de l'une de ces matrices. Ce sujet faisait ainsi appel à des théorèmes fondamentaux du cours, sur les intégrales à paramètres et la réduction notamment, et à des connaissances en intégration, en trigonométrie et en probabilités.

Le sujet était long et comportait des questions abordables jusqu'à la fin, permettant aux candidats d'aborder un nombre important de questions et de montrer l'étendue de leurs acquis. Cette année, certaines excellentes copies ont abordé avec succès l'ensemble du sujet. Les plus faibles ont profité de la partie I du problème 2 pour glaner quelques points.

Comme les années précédentes, les correcteurs ont noté les efforts de présentation des copies des candidats. Les résultats sont le plus souvent mis en évidence et les questions (souvent) bien numérotées.

3/ REMARQUES SPÉCIFIQUES

Problème 1

Q1 : si certains ont pensé à la solution consistant à appliquer une inégalité des accroissements finis, beaucoup s'en sortent avec des études de fonctions. Deux erreurs fréquentes dans ce cas : penser qu'il suffit de démontrer que $sin\, t \leq t$ ou, plus préoccupant, d'affirmer que $t \mapsto |\sin(t)| - t$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et de dérivée $t \mapsto |\cos(t)| - 1$.

Q2 : une question très classique de convergence d'intégrales généralisées. La domination en $+\infty$ a été bien menée par bon nombre de candidats. Cette question a mis en lumière une confusion très fréquente entre la preuve de la convergence et celle de la continuité d'une intégrale à paramètre. Qui peut le plus peut le moins, mais cela donne lieu à des développements inutilement compliqués dans le meilleur des cas et à des erreurs dans le moins bon. Attention également lorsque la convergence de l'intégrale est justifiée par comparaison ou lorsque l'on vérifie une hypothèse de domination à s'assurer de comparer des fonctions positives.

Q3 : notons que trop de candidats ont ignoré le problème d'interversion et ont affirmé que puisque l'intégrande tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, il en est de même de $F(x)$. Parmi ceux qui ont abordé la justification de la convergence, si certains ont pensé à utiliser Q1, d'autres se sont lancés dans une application du théorème de convergence dominée. Dans le premier cas, beaucoup de candidats ont trop rapidement conclu à partir de $F(x) \leq 1/x$ et pas de $|F(x)| \leq 1/x$. En cas d'utilisation du théorème de convergence dominée, remarquons qu'il n'est pas suffisant de considérer uniquement la suite de terme général $x_n = n$.

Q4 : cette question d'application du cours a été souvent bien traitée et un nombre satisfaisant de candidats ont pensé à vérifier la domination sur les intervalles du type $[a;\, +\infty[$. Certains candidats n'ont cependant pas compris que dans la domination, le paramètre doit « disparaître ».

Q5 : cette question a été en général bien traitée par les candidats qui l'ont abordée. Notons tout de même quelques réticences chez certains à utiliser l'intégration d'une fonction à valeurs complexes (ils ont alors préféré une double intégration par parties), d'assez fréquentes erreurs de signe et un dernier résultat trop souvent affirmé avec une justification du type « en effectuant un calcul similaire, on prouve que… ».

Q6 : il est regrettable que près de la moitié des candidats aient oublié que, puisque F est une primitive de G, il y a une constante à déterminer pour en déduire une expression de F.

Q7 : cette question a été étonnamment abandonnée par une proportion non négligeable de candidats ayant pourtant identifié la formule trigonométrique à appliquer. Ceux qui sont allés au bout de la question ont en général bien rédigé la récurrence.

Q8 : bien que plus difficile que la précédente, cette question a été plus souvent abordée. Le mécanisme de la récurrence est souvent bien initié et l'indication utilisée. Peu de candidats ont vu la séparation entre indices pairs et impairs et une minorité sont parvenus à la rédiger de manière satisfaisante. Notons que certains sont parvenus « miraculeusement » au résultat sans justifier la partie sur les indices. Il convient de rappeler que ce type de démarche a très peu de chances d'abuser le correcteur.

Q9 : compilation des résultats des questions précédentes en général bien traitée.

Q10 : la bonne application du théorème de convergence dominée reste une difficulté pour une majorité de candidats. De nouveau la domination laisse trop souvent la variable n présente. Malgré l'indication, certains candidats y ont vu à tort une question sur les séries.

Les dernières questions du Problème 1 ont été assez peu traitées. Notons pour **Q12** que la plupart des candidats n'ont pas vu que la somme comportait « un terme de trop » pour être exactement une somme de Riemann.

Problème 2

Q15 à **Q17** : il s'agit de questions assez faciles et souvent bien traitées. Certains perdent en efficacité en calculant un discriminant pour factoriser $x^2 + 4$.

Q18 : l'erreur la plus fréquente a été de justifier la non diagonalisabilité de B sur $\mathbb{R}$ par le fait que son polynôme caractéristique n'est pas scindé à racines simples.

Q19 : bien réussie en général. Certains ont perdu du temps en effectuant un pivot de Gauss pour calculer l'inverse d'une matrice diagonale.

Q20 : le calcul a été en général correctement mené. Une moitié des candidats ont pensé au théorème spectral (notons qu'il convient de préciser que la matrice est à coefficients réels). D'autres malheureusement ont calculé le polynôme caractéristique de la matrice $\Delta^{-1}A\,\Delta$. La majorité des candidats savent qu'une matrice semblable à une matrice diagonalisable est diagonalisable.

Q21 : cette question était plus difficile et a été correctement traitée par peu de candidats. Beaucoup ont pensé à évaluer en 0 ou en $\frac{\pi}{2}$, mais peu sont parvenus à donner un argument précis et se sont contentés d'un trop évasif « on dérive $\frac{n}{2}$ fois » ou d'un « on divise par sin et on évalue en $x = 0$ » sans justification du prolongement par continuité.

Q22 : ce calcul de dérivée a posé problème à un certain nombre de candidats. Parmi ceux qui y sont parvenus, trop peu ont pensé à distinguer les cas $k = 0$ et $k = n$.

Q23 : question généralement bien traitée.

Q24 : la formule du binôme de Newton est connue, mais on lit ensuite trop souvent des arguments du type « g_k est le produit de deux fonctions de V_n, donc g_k est un élément de V_n » sans plus d'explication. Un autre raisonnement récurrent et faux : certains ont montré l'égalité $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,g_k(x) = (2\cos(x))^n$ puis ont affirmé que puisque le terme de droite est élément de V_n, il en est de même pour chaque terme de la somme.

Q25 : la plupart des bons arguments ont été donnés, pas toujours dans le bon ordre, la formulation de la question y étant peut-être pour quelque chose.

Q26 : bien traitée par la minorité de candidats qui l'ont abordée.

Q27 : peu traitée, cette question a permis aux meilleurs candidats de démontrer leurs capacités de synthèse.

Q28 : bien traitée en général. Certains ont oublié d'utiliser le fait que D est diagonale.

Q29 : le calcul matriciel a été rarement correctement mené et l'utilisation de la question précédente souvent oubliée. La relation entre les polynômes caractéristiques a été souvent affirmée sans justification et trop de candidats pensent que le déterminant est linéaire.

Q30 : cette question a été peu abordée. Certains sont parvenus à justifier la forme des valeurs propres de A_n, mais pratiquement aucun n'est parvenu à justifier correctement l'espace propre demandé.

Q31 : la propriété demandée a souvent été bien énoncée et peu justifiée. Notons qu'un nombre non négligeable de candidats, sans doute influencés par les parties précédentes, ont donné des réponses du type « la famille est libre / liée / une base ».

Q32 : question facile pour laquelle une minorité pense à distinguer les cas $j = 0$ et $j = n$.

Q33 : question assez bien réussie lorsqu'elle a été abordée.

Q34 : la formule des probabilités totales n'a pas toujours été appliquée avec rigueur.

Q35 à **Q38** : questions peu abordées par les candidats. Seulement quelques-uns sont parvenus à donner tous les arguments.

4/ CONCLUSION

En guise de conclusion, nous donnons ici quelques points d'améliorations sur lesquels il convient d'insister.

- Un nombre important de candidats ne prennent pas le recul nécessaire pour voir que des questions (parfois bien résolues) sont bien utiles pour répondre efficacement aux suivantes. Lorsque les parties d'un problème sont indépendantes, cela est précisé dans l'énoncé. En revanche, une partie est rarement une succession d'exercices indépendants.

- Une attention particulière doit être donnée à la précision d'utilisation des résultats du cours et d'exposition des arguments. Il arrive trop souvent qu'une hypothèse soit oubliée ou que la vérification rigoureuse de celle-ci soit remplacée par l'affirmation que l'hypothèse est bien satisfaite.

- Les majorations sont comme chaque année source de difficultés. La valeur absolue et le module ne sont pas employés avec aisance et il est très fréquent de rencontrer des inégalités entre nombres complexes ou des emplois de résultats de comparaison/domination pour les intégrales généralisées sans vérification de la positivité des fonctions considérées.